

Chapitre de l'ouvrage *Formes et formations du rapport au savoir* publié chez l'Harmattan sous la direction de Nicole Mosconi, Jacky Beillerot, Claudine Blanchard-Laville, en 2000.

Publié en anglais en mars 2001 : Mathematics knowledge and its relation to the knowledge of mathematics teachers : linked traumas and resonances of identity, *For the learning of mathematics, An international journal of mathematics education*, Vol. 21 , N° 1.

**Savoir mathématique et rapport au savoir des professeurs de
mathématiques
Traumatismes en chaîne et résonances identitaires**

**Pierre Berdot
Claudine Blanchard-Laville
Alain Bronner**

Argument

Les travaux d'Alain Bronner (1997) sur les problèmes d'enseignement et d'apprentissage des nombres réels nous ont fait découvrir que les enseignants de mathématiques de collèges et de lycées sont la « proie » d'un certain type de conflits internes à propos de leur rapport au savoir. Dans l'étude qui suit, nous nous proposons de montrer qu'en fait, certains de ces enseignants se sentent comme attaqués au niveau d'une sorte de « noyau dur » de leur rapport au savoir mathématique, constitutif de leur soi professionnel. En effet, l'évolution des programmes, depuis qu'ils ont commencé à enseigner, est telle que certains objets fondamentaux du savoir mathématique, qui faisaient partie de leurs apprentissages et de leur formation, « sont portés disparus ». Cette perte est ressentie plus ou moins violemment par les enseignants selon les aménagements qu'ils trouvent pour y faire face et les compensations qu'ils retirent de ces aménagements.

À notre avis, les effets psychiques de cette perte et de ces « attaques » sont beaucoup plus importants qu'il n'y paraît au premier abord ; c'est pourquoi nous avons cherché à comprendre les processus sous-jacents en jeu et, aujourd'hui, nous estimons qu'il est possible de parler de véritables traumatismes, reliés aux diverses réformes de programmes apparues ces vingt dernières années, dont les enseignants seraient victimes. Face à ce que l'on peut considérer comme une forme de « maltraitance institutionnelle » à leur égard, et en réponse aux conflits que cela suscite en eux, les enseignants mettent en place, chacun à leur façon, des modalités d'aménagement qui compensent plus ou moins bien la souffrance psychique ainsi déclenchée ; nous décrirons quelques scénarios significatifs mis en place dans cette perspective.

Cette étude nous a conduits à nous interroger sur la pertinence qu'il y aurait à parler de « traumatisme institutionnel » et à transposer dans ce domaine des éléments de la théorie du traumatisme développée en psychanalyse. Nous avons été amenés ensuite à chercher l'origine de ces traumatismes dans les crises successives que le savoir mathématique a eu à affronter au cours de l'histoire. Ainsi, il nous est apparu qu'il y avait comme des traumatismes en chaîne, comme une sorte de généalogie des traumatismes. Dans la réalité historique, les traumatismes prennent naissance chez les mathématiciens au moment de la découverte de nouveaux savoirs lorsque ceux-ci viennent bouleverser leur univers mathématique. L'institution d'enseignement, qui doit s'adapter à ces changements dans le savoir de référence, en supporte un certain nombre de conséquences. Selon les époques, elle propose des réponses plus ou moins adéquates. Des effets de ces traumatismes se transmettent aux professeurs au cours de leurs études de mathématiques, par l'intermédiaire de leurs enseignants-formateurs à l'université. Par la suite, les professeurs en cours d'exercice risquent de répercuter des effets de ces traumatismes par contrecoup chez leurs élèves et ce, d'autant plus fortement que l'institution ne propose pas suffisamment d'éléments de négociation, voire reste silencieuse, au niveau des aménagements

de ces « crises » du savoir dans le processus de transposition didactique. Alain Bronner, à propos de certaines périodes, va jusqu'à avancer la notion de « vide didactique institutionnel ». Autrement dit, il propose l'idée que certaines réponses institutionnelles laissent les enseignants en suspens, comme sur un fil dans le *vide*, pour certains points délicats d'enseignement. L'institution peut peut-être penser que la régulation s'effectue par le biais de la formation initiale et/ou continue des enseignants. On pourrait en effet croire en première approximation que la compétence scientifique des enseignants, qui n'est pas en question ici, leur permet de s'adapter. Mais, à notre avis, cela est loin de suffire, et cette étude tente de le montrer, s'il s'agit bien, comme nous le pensons, de traces de « traumatismes » au plan psychique. De nombreux travaux psychanalytiques montrent aujourd'hui que les traumatismes psychiques retentissent sur plusieurs générations par le biais de ce qui est appelé une *transmission psychique intergénérationnelle* (Kaës, 1993 et Tisseron, 1995). Sur le registre professionnel, il nous semble possible de transposer cette notion dans le cadre de la transmission du métier d'enseignant, c'est-à-dire de la formation des enseignants. Les effets dont nous parlons se situent sur un autre registre que celui du cognitif. Or, on sait que la dimension psychique n'est pas actuellement prise en compte dans la formation ; elle est assez peu prise en compte pour ce qui concerne l'analyse des pratiques professionnelles enseignantes et elle ne l'est pratiquement pas du tout en ce qui concerne les questions du rapport au savoir des enseignants.

Introduction

Pour réaliser ce travail, nous sommes donc partis de l'étude didactique réalisée par Alain Bronner qui s'appuyait sur les résultats d'une enquête par questionnaires et entretiens auprès d'enseignants de mathématiques du

secondaire, à propos de leur manière d'enseigner la racine carrée¹. Après avoir analysé les rapports des personnes qu'il a interrogées aux objets de savoir « racine carrée » et « nombres réels »² l'auteur a identifié chez ces personnes quatre manières de se positionner par rapport aux injonctions de l'institution :

- une position de conformité stricte, où l'enseignant suit à la lettre les instructions de l'institution
- une position dite d'ouverture vers les nouveaux nombres, dans laquelle les enseignants essaient de montrer que de nouveaux objets mathématiques, autres que les nombres décimaux déjà connus des élèves, ont un statut de nombres
- une position d'ouverture vers les nombres non décimaux, dans laquelle les enseignants montrent que ces nouveaux nombres ne sont pas des nombres décimaux
- et enfin, une position d'ouverture assumée vers les nouveaux nombres que représentent les « irrationnels » et que l'institution ne demande pas d'introduire

Pour les lecteurs non familiers avec les mathématiques, il est possible pour aller plus loin de s'appuyer sur la lecture de la note sur les ensembles de nombres qui figure en annexe 1 de ce texte et pour une compréhension plus approfondie de cette typologie on peut consulter l'annexe 2.

Pour la suite de notre propos, il suffit de retenir les éléments suivants :

- 1) Les positions décrites dans cette typologie sont les formes de réponses des enseignants au « vide institutionnel » évoqué précédemment.
- 2) Dans les deux dernières positions identifiées, on remarque que les enseignants opèrent une certaine transgression par rapport aux programmes officiels qui ne leur demandaient pas, dans la période d'étude, d'introduire ce caractère de

¹ C'est actuellement en quatrième au collège que les élèves rencontrent pour la première fois officiellement l'objet « racine carrée ». La racine carrée d'un nombre « a » positif est alors définie comme le nombre positif dont le carré est « a ».

² On peut consulter en annexe une note qui rappelle quelques éléments sur les différents ensembles de nombres.

nouveaux nombres à propos des racines carrées alors que dans les deux premières positions, ils se soumettent aux injonctions institutionnelles.

Au-delà de cette typologie du rapport institutionnel au savoir des enseignants, Alain Bronner a mis en évidence, par le biais d'entretiens un peu plus approfondis, que, pour certains d'entre eux, la façon d'aménager leur pratique d'enseignement par rapport à cette question suscitait un état de conflit intérieur. C'est cette conclusion qui a attiré l'attention des deux autres auteur(e)s de cet article, Claudine Blanchard-Laville et Pierre Berdot, dans la mesure où elle mettait l'accent sur une forme de souffrance du sujet-enseignant dont ils avaient envie de comprendre les ressorts sous-jacents. Il leur a semblé alors que la prise en compte des processus psychiques en jeu dans cette affaire pourrait apporter un éclairage complémentaire pour interpréter le malaise de ces enseignants. Ainsi, avons-nous décidé de prolonger l'étude didactique par un travail à trois, dans une perspective plus clinique, en reprenant l'analyse des entretiens d'enseignant(e)s sur laquelle elle était fondée, avec un nouveau regard plus axé sur l'identification des conflits internes et de leur aménagement chez les enseignants interviewés.

Cette reprise des analyses des entretiens s'est effectuée dans un esprit co-disciplinaire (Blanchard-Laville, 1999), en essayant d'articuler la dimension didactique et la dimension psychique. Cette confrontation a donné notamment l'occasion de conjuguer la conception du rapport au savoir telle qu'elle est promue par l'approche anthropologique didactique d'Yves Chevallard (1988-89), en termes de rapport personnel et de rapport institutionnel aux objets de savoir, avec la conception plus clinique du rapport au savoir telle qu'elle est proposée dans l'équipe du CREF de Nanterre (Beillerot, Blanchard-Laville, Mosconi, 1996).

Les personnes interviewées sont des professeurs de mathématiques, ayant entre 40 et 55 ans et enseignant dans des classes de Troisième ou de Seconde, volontaires pour participer à l'enquête. Étant donné leur âge, ces enseignants ont

vécu la réforme dite des maths modernes³, en tant qu'élèves et/ou étudiants pour la plupart, certains ont commencé à enseigner sous l'égide des programmes de cette période-là.

L'entretien leur a été présenté comme un élément de travail d'une recherche sur l'enseignement de la racine carrée, l'objectif étant de repérer les difficultés dans leurs choix didactiques pour cet enseignement.

Les entretiens ont été menés de manière semi-directive par le chercheur lui-même.

Nous poursuivons par l'analyse de quatre de ces entretiens qui nous ont semblé pouvoir fournir un matériel propice pour une analyse plus clinique alors même que ces entretiens sont conduits de manière guidée, dans une perspective semi-directive, aux fins d'une analyse didactique.

D'une forme de maltraitance institutionnelle

Jacques et l'algorithme de Héron

Dans un premier temps, nous choisissons d'écouter un des professeurs interviewés que nous appelons Jacques. Ce professeur de 55 ans enseigne dans un collège de la banlieue d'une grande ville et il a plusieurs classes de troisième.

L'entretien semi-directif qui a été réalisé à son endroit proposait, comme nous l'avons déjà suggéré, un certain nombre de thèmes de réflexion concernant l'enseignement de la racine carrée dans ses classes de troisième. L'entretien a été

³ Cette réforme, impulsée par une commission de mathématiciens, a été mise en place en 1968, puis arrêtée abruptement en 1978 sous la pression des professeurs. Elle avait l'ambition de réduire la distance entre les découvertes concernant les grandes structures mathématiques faites un siècle auparavant et les enseignements effectués. On pensait, à l'époque, que l'introduction précoce de ces structures faciliterait l'apprentissage des mathématiques. Cette conception était renforcée par le fait que certains ont vu un rapprochement entre ces structures et les structures cognitives élaborées par les travaux de Piaget au niveau du développement de l'enfant.

effectué avant que ne se déroule la séquence d'enseignement correspondante. L'objectif de l'entretien était de faire exprimer au professeur les choix didactiques auxquels il pensait devoir procéder pour cette future séquence ainsi que les difficultés auxquelles il estimait être confronté dans ces choix.

Ouvrons ici une parenthèse pour aider à la compréhension d'un lecteur peu familier avec les cursus d'enseignement de mathématiques. Précisons d'abord que l'enseignement de la racine carrée dans les programmes actuels doit s'attacher surtout à transmettre des règles de calcul algébrique sur cet objet : la règle du produit ou du quotient de racines carrées, par exemple $\sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$. En revanche, on n'étudie plus les propriétés arithmétiques, c'est-à-dire on n'est plus censé enseigner le fait que les racines carrées de certains nombres sont des nombres « irrationnels », comme par exemple $\sqrt{2}$. Justement, cet exemple prototypique (montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel) faisait partie des activités de nombreux manuels il y a quelques années. Ce type d'exercice a disparu ou est relégué à la toute fin du chapitre sur les racines carrées. D'ailleurs, les nombres irrationnels ne sont pas connus des élèves, en tant que tels, jusqu'en troisième et les programmes ne demandent pas explicitement aux professeurs de les introduire. De même, le caractère non décimal des racines carrées irrationnelles⁴ n'est pas non plus mis en évidence par les instructions officielles, alors même que les nombres décimaux ont joué et continuent à jouer un rôle central dans les travaux numériques qui sont présentés aux élèves dans l'enseignement secondaire. On n'enseigne plus, non plus, d'algorithmes de calcul des racines carrées comme on le fait encore pour la multiplication et la division par exemple, et notamment, on n'apprend plus à utiliser la méthode d'extraction de la racine carrée (méthode manuelle de calcul), qui a été enseignée pendant des siècles avant de disparaître dans les années soixante-dix. C'est cette non-

⁴ Par exemple, les racines d'un nombre entier non carré parfait comme $\sqrt{13}$.

négociation du passage des nombres décimaux aux autres nombres qui crée une sorte de « vide didactique ».

Ce qui nous frappe d'emblée dans le discours de Jacques, c'est qu'il s'étonne d'être interrogé sur cet objet, la racine carrée, car, d'après lui, c'est une question sur laquelle il n'y aurait pas grand-chose à dire ou si peu. Il n'y a pas de problème pour lui et les élèves n'ont pas de difficultés dans cette leçon : « *Sincèrement cette leçon sur les racines carrées, pour moi, est une leçon très simple ; et pour les élèves, à exposer, faire comprendre, à faire passer. C'est une leçon qui est relativement accessible, c'est-à-dire qu'ils la reçoivent très bien* ». Notons qu'il commence ainsi l'entretien et qu'il répète cette remarque de manière récurrente tout au long de son discours. Par exemple, il dit : « *Encore une fois je vous le dis c'est une leçon qui passe bien* » et il conclut même l'entretien de cette façon : « *Je vais maintenant vous poser une question, mais pourquoi vous étudiez les racines carrées ? Pour nous, c'est une leçon comme une autre* ». Il traduit son étonnement en tentant de faire dévier le cours de l'entretien et en proposant presque un autre objet de réflexion : « *Vous m'auriez parlé de Thalès⁵ qui est une leçon qui ne me paraît pas être une leçon au plan de la compréhension plus délicate, mais pourtant les élèves la reçoivent beaucoup plus mal* ». Il tente en quelque sorte de se débarrasser du thème proposé par l'intervieweur : « *la racine carrée est l'emballage* », « *pour moi c'est l'emballage* ». Cette insistance de Jacques à refuser le questionnement sur cet objet nous a alertés. D'autant que les recherches en didactique des mathématiques ont bien montré que l'introduction de cet objet de savoir au collège constitue un passage pour le moins problématique pour le professeur comme pour les élèves. Et pourtant Jacques dit à plusieurs reprises : « *pour moi c'est une leçon qui ne rencontre pas de difficultés majeures* ». Il précise aussi :

⁵ Le théorème de Thalès est une sorte d'emblème (avec le théorème de Pythagore) de l'enseignement de la géométrie au collège. Plus précisément, il s'agit d'un théorème attribué

« je pense qu'approximativement 60% et 70% des élèves avaient la moyenne. Ce qui montre à l'évidence que ce n'est pas une leçon difficile ».

Or, si l'on regarde de plus près son discours, ce qu'il dit, en fait, ce qu'il indique comme n'étant pas difficile, ce sont les techniques de calcul : *« En ce qui concerne les techniques opératoires, les calculs proprement dits, ils ne rencontrent pas de difficultés majeures. Par exemple pour simplifier un radical, ils ont très bien compris ».* Autrement dit, ce qui paraît facile pour lui et pour les élèves, c'est à peu près ce que l'institution lui demande d'enseigner, comme nous l'avons vu précédemment. Par contre, dès qu'il s'écarte un tant soit peu des lignes strictes du programme, alors là, il n'en est plus de même : *« c'est une leçon qui passe bien sauf au niveau des radicaux⁶ comportant des lettres mais en fait ce n'est pas explicitement au programme de troisième ».*

Ce sont ces éléments qui apparaissent en première lecture, en réponse manifeste à l'objectif explicite de l'entretien. Néanmoins, l'insistance un peu trop affichée sur la facilité de cette leçon et le désir de l'interviewé de détourner le but de l'entretien nous ont conduits à interroger son discours au-delà de cet aspect manifeste. Nous avons alors perçu, derrière le discours exhibé sur « la facilité », un tout autre discours faisant entendre des sortes de *regrets*. Jacques dit par exemple : *« l'utilisation des calculatrices maintenant a annulé tous les calculs sur les racines carrées. J'en veux pour preuve : quand j'étais élève j'étudiais la méthode d'extraction des racines carrées ; elle est partie au panier depuis quelques années ; pourquoi ? parce qu'elle était très lourde cette méthode-là »* et il exprime vraiment une forme de nostalgie : *« C'était quand même une méthode de réflexion aussi importante que celle qui conduit à rendre rationnel le dénominateur d'une fraction comportant une racine carrée ».* Nous constatons que les regrets qu'il exprime concernent des thèmes liés à la racine carrée qui ne sont plus à l'ordre du jour des programmes actuels mais qui, compte tenu de son

au mathématicien grec Thalès qui permet d'obtenir l'égalité de proportions dans une configuration de deux droites sécantes à des droites parallèles entre elles.

⁶ Le radical est le signifiant symbolique de la racine carrée $\sqrt{\quad}$.

âge, ont fait vraisemblablement partie de ses propres apprentissages et ont été des objets de son enseignement lors de ses premières années d'exercice. Comme il le souligne, « *cet apprentissage qui était essentiel il y a quelques années l'est beaucoup moins* ». Concernant les calculs sur des expressions contenant des radicaux qui sont hors programme, il admet : « *Ceux-là (ces exercices) je leur fais faire quand même, mais dans la mesure où tout ce qui précède est bien acquis. Tout le reste est bien classique et ne présente pas de difficultés* ».

L'ensemble de ces propos témoigne pour nous de ce que Jacques a un peu de peine à renoncer à certains objets mathématiques « anciens » qui ont disparu des programmes actuels ou qui sont ramenés à d'autres niveaux d'enseignement pour se plier aux injonctions de l'institution. Ainsi, il se permet d'introduire des notions et des procédures qui, visiblement, lui tiennent à cœur mais qui le conduisent à s'éloigner des recommandations officielles : « *Là j'ai essayé un petit algorithme (en fait il s'agit de l'algorithme de Héron⁷) qui n'est pas facile pour une racine carrée ; c'est-à-dire montrer que l'on peut trouver pour toute racine carrée une fraction dont la valeur est très voisine de la racine carrée. Il est très bien cet algorithme, mais un peu délicat, mais si on fait un ou deux exemples les élèves y arrivent parfaitement* ». Il tente de se justifier aux yeux de l'intervieweur, ayant conscience sans doute d'une sorte de transgression vis-à-vis des instructions officielles (nous reviendrons un peu plus loin sur la situation d'entretien elle-même qui, selon nous, ravive pour Jacques son rapport à l'institution) : « *Je le fais, parce que je le trouve intéressant, cela les fait travailler sur les quotients, sur les racines carrées car ils doivent chercher la partie entière de la racine carrée, etc., cela leur fait faire un exercice supplémentaire* ». En fait, nous avons la sensation que c'est surtout pour lui-

⁷ L'algorithme de Héron est une méthode de calcul approché d'une racine carrée, encore plus ancienne (et plus performante) que « la méthode d'extraction ». On en retrouve trace chez les Babyloniens. Cette méthode consiste, à partir d'une valeur approchée a de la racine carrée d'un nombre A , à obtenir une meilleure approximation encore par le calcul de la quantité

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right).$$

même qu'il introduit cet algorithme. Comme si ce geste lui permettait de se ressourcer en le reliant à des objets fondamentaux de son rapport au savoir mathématique, des objets qu'il a rencontrés au cours de ses études et qui sont certainement essentiels dans la constitution de sa personnalité de professeur. D'ailleurs, il parle de cet algorithme de Héron comme d'un petit objet fragile à soigner et à ménager : « *là j'ai essayé un petit algorithme* » dit-il, ... « *il est très bien cet algorithme mais un peu délicat* ». Cette façon de parler d'une procédure mathématique nous fait ressentir la charge affective qu'il attache à ce type d'objet.

En résumé, tout semble indiquer que le rapport de Jacques à l'objet « racine carrée » s'est constitué au cours de son passé d'étudiant, à une époque où les choix de l'institution à propos de l'enseignement de cet objet étaient de nature bien différente de ceux de la période actuelle. On peut penser que le rapport qu'il a construit à ce moment-là aux mathématiques est un élément constitutif de son identité professionnelle de professeur de mathématiques, c'est-à-dire fonde son soi professionnel. Or, il nous fait comprendre que toutes les valeurs qu'il s'est créées au moment de sa construction identitaire professionnelle se sont effondrées, lorsqu'il parle « d'annulation » et de « mise au panier » de ses propres méthodes de calcul. La tonalité de son discours est alors légèrement dépressive, nous faisant tout à fait penser que ces objets de savoir anciens se sont constitués pour lui comme des objets psychiques internes fondateurs et que leur perte le conduit à un mouvement dépressif que l'entretien ravive. Un de ses moyens de défense par rapport à cette dynamique semble être de retourner l'attaque vers l'extérieur et en particulier vers les objets externes que représentent les calculatrices ; celles-ci, en effet, semblent porter tous les maux et l'expression de son ressentiment à leur sujet est très forte ; comme si l'institution les lui avait imposées en tant qu'objets de substitution par rapport à ses propres objets perdus. Il dit par exemple à propos de la méthode d'extraction : c'était « *une méthode de*

réflexion importante » et [...] « *toutes les techniques opératoires dans les prochaines années vont totalement disparaître* ». On a presque l'impression que les fondations mêmes de la construction de son rapport au savoir mathématique se sont effondrées.

En fait, c'est bien l'institution qui a supprimé du programme ses objets préférés et lui impose un certain usage des calculatrices, mais Jacques épargne l'institution dans son discours et concentre plutôt son agressivité sur les calculatrices. Celles-ci sont devenues « le mauvais objet » pouvant détériorer les bons objets internes.

On peut imaginer que cette interprétation dépasse le cas de Jacques. En effet, un certain nombre d'études montrent que les enseignants de mathématiques, depuis les enseignants de collège jusqu'aux enseignants de l'université, résistent à l'intégration de l'usage des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques. Peut-être font-ils porter à ces calculatrices le poids de la perte des bons objets de savoir fondamentaux qu'elles sont venues remplacer ? Nous sommes bien conscients que cette interprétation est surtout valable pour des enseignants de la génération de Jacques. D'ailleurs, pour les enseignants formés actuellement, les choses sont renversées et ils sont tout étonnés d'apprendre l'existence de cette méthode d'extraction des racines carrées « à la main », comme il existe un algorithme manuel pour effectuer une division, vu leur familiarité avec les calculatrices. Mais ce qui nous importe à travers l'étude de ce cas particulier de l'enseignement de la racine carrée, conjoncturel dans les choix de l'institution, c'est de mettre à jour que les enseignants peuvent se sentir agressés dans les fondations de leur rapport au savoir par certains choix institutionnels. L'institution est, à son insu, quasiment « maltraitante » ; d'une certaine façon, elle est psychotisante à leur égard, les obligeant presque à se dissocier dans un double lien : soit ils sont congruents avec eux-mêmes et ce qui a fondé leur rapport au savoir mathématique et alors ils sont en porte-à-faux avec l'institution par rapport aux mathématiques qu'elle leur demande d'enseigner ; soit ils se

conforment aux injonctions de l'institution, et les voilà en conflit avec eux-mêmes, en tout cas avec leur soi profond de professeur de mathématiques. Dans tous les cas, les enseignants sont contraints d'aménager un système défensif pour alléger la souffrance psychique que cela leur occasionne.

L'analyse globale de l'entretien conduit à penser que pour ce professeur, le statut de l'intervieweur (un chercheur de statut universitaire) a eu des effets importants. Jacques donne l'impression d'avoir voulu faire bonne figure au niveau de son savoir académique. De plus, il semble avoir ressenti la situation d'entretien comme une situation d'évaluation de son enseignement et ainsi il croit qu'il doit montrer sa compétence sur les problèmes d'enseignement et d'apprentissage. En manifestant que l'intervieweur s'intéresse à un objet où il n'y a rien à dire ou si peu, Jacques essaie de renverser les rôles ; sa dernière phrase est une question retournée à l'intervieweur comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Le poids du contexte d'énonciation est d'autant plus fort que, sur ce thème, Jacques se sent mal à l'aise. On peut supposer que le cadre de l'entretien reproduit pour lui en miniature le cadre institutionnel qui attaque ses objets internes. Dans ses premières réponses, il négocie pour apaiser ce qu'il ressent comme des menaces et un danger, et pour se montrer un sujet conforme de l'institution... Au cours de l'entretien, il banalise le problème tout en se déprimant légèrement. A la fin, il renverse les rôles en prenant la place de l'intervieweur, comme si une partie de lui s'identifiait à l'agresseur externe pour se défendre. En fait, le conflit interne était refoulé, il voulait l'oublier et la situation d'interview l'a ravivé. Pour autant, son discours témoigne de son impossibilité d'attaquer directement l'institution qui cependant le maltraite : il « préfère » payer de sa soumission, c'est-à-dire d'une certaine souffrance masochiste ; le prix psychique est sans doute moindre pour lui que d'attaquer l'institution avec les risques fantasmatisés que cela comporterait.

Rappelons ici que c'est dans une optique clinique que nous réexaminons les entretiens. Selon cette perspective, nous attribuons une signification au discours latent des interviewés, et ce, hors tout jugement de valeur. Nous cherchons à comprendre les processus psychiques à l'œuvre derrière les conduites rapportées dans le discours. Cette méthode d'investigation a surtout une valeur heuristique ; elle s'appuie essentiellement sur l'élaboration des ressentis contre-transférentiels des chercheurs par rapport aux discours des interviewés, discours pris dans toute sa dimension énonciative. En l'occurrence, dans cette recherche, les trois auteurs sont de formation initiale mathématique et enseignent (ou ont enseigné pendant longtemps) cette matière. Ainsi, les propos des enseignants que nous analysons trouvent largement écho chez nous ; c'est en nous appuyant sur cette expérience que nous pouvons nous laisser aller à associer sur les paroles des interviewés et proposer des hypothèses interprétatives.

L'analyse de l'entretien de Jacques nous a permis d'introduire la question des effets d'une forme de maltraitance institutionnelle sur le rapport au savoir des enseignants de mathématiques. Avec l'analyse d'un deuxième entretien, celui de Paule, nous allons retrouver la même problématique mais découvrir une autre manière d'aménager les difficultés issues des changements institutionnels.

Paule ou la confirmation des choix de l'institution, sous couvert du bien des élèves

Paule a environ quarante ans au moment de l'entretien.

Elle est professeur de collège dans une toute petite ville de province.

Nous retrouvons le même cadre d'énonciation que pour l'entretien avec Jacques (même intervieweur et même sujet d'investigation) mais les propos de Paule témoignent que la situation d'entretien est moins menaçante pour elle que pour Jacques ; elle utilise même cette occasion pour élaborer partiellement un conflit qui, sans cela, ne serait peut-être pas devenu conscient. Au cours de l'entretien,

on a l'impression que viennent au jour des éléments refoulés, comme en témoignent les propos suivants : « *Mais c'est vrai qu'au début c'est comme cela qu'on présentait les ensembles de nombres. Maintenant la preuve c'est que je n'y pensais plus* ». Comme nous l'avons déjà dit, on retrouve la même problématique qu'avec Jacques. La construction des systèmes de nombres semble avoir participé pour Paule du noyau dur fondateur de son rapport aux mathématiques. Elle dit : « *j'ai toujours été fascinée par cette façon d'agrandir les ensembles de nombres et de retrouver les propriétés qui se prolongent*⁸ ». Or, les nouveaux programmes ne proposent plus de construire par emboîtements successifs les systèmes de nombres et, ainsi, Paule a été poussée à abandonner ce point de vue cohérent sur le numérique qui était à la base de sa formation comme elle nous le dit : « *j'ai du mal à abandonner un certain nombre de choses et on a été formé comme cela* ».

En fait, dès le début de l'entretien, tout était dit, la catastrophe était annoncée : « *Il n'y a plus de théorie des nombres* ». Et, pour elle, c'est plus net qu'avec Jacques, c'est la faute des nouveaux programmes. L'institution l'a contrainte à abandonner un objet psychique interne sans doute extrêmement structurant pour son soi professionnel. Mais à quel prix ? Comment est métabolisée la souffrance entraînée par cette perte chez elle ?

Pour Jacques, on a pu voir affleurer des sentiments dépressifs ; pour Paule, on note une tonalité dépressive aussi tout au long de l'entretien, mais plus légèrement que chez Jacques. Sans doute, elle a mieux réussi à aménager cette perte que lui, notamment en valorisant sa fonction pédagogique d'adaptation aux élèves par rapport à ce que font ses collègues qui sont restés campés, d'après elle, sur les anciens programmes, et qui n'ont pas su s'adapter aux changements d'élèves : « *Mes collègues de l'établissement sont plus âgés et ils ont enseigné plus longtemps les anciens programmes et sont restés plus attachés* ». C'est ce qu'elle met en avant. Pour autant, on a le sentiment qu'elle n'est pas très investie

⁸ Voir en annexe la note sur les ensembles de nombres.

sur les élèves. On ressent même un ton un peu dévalorisant quand elle en parle : « *On finit par s'adapter aux gamins* ». Peut-être est-ce son agressivité vis-à-vis de l'institution qui est déplacée sur les élèves. Le recours à l'idée que ces choix de l'institution sont « pour le bien » des élèves lui évite peut-être d'entrer dans la double contrainte que nous avons évoquée pour Jacques ; elle rationalise les choix de l'institution en dénonçant l'incapacité des élèves à entrer dans ce type de compréhension : « *C'était satisfaisant pour le prof mais les élèves ne voyaient pas du tout* » et en s'appuyant sur l'idée que des gens compétents ont fait ces choix : « *Ma conception des choses est qu'on a des programmes, qu'il y a des gens qui ont réfléchi pour nous, et qu'il faut s'en tenir à cela. Je fais confiance.* »

Patricia ou la remise en question et la quête de solutions

Voyons avec Patricia une autre manière de réagir à ce questionnement.

Patricia est âgée d'une quarantaine d'années au moment de l'interview et elle enseigne dans un collège d'une très petite ville de province du sud de la France.

Dès le début de l'entretien, Patricia exprime qu'elle est surprise par la question posée, à savoir la question de l'introduction des irrationnels dans l'enseignement : « *des irrationnels, c'est vrai que c'est une question que je ne m'étais pas posée* ». En fait, on ressent dans ses premières phrases un certain flottement autour de la notion même d'irrationalité : le caractère irrationnel ne semble pas tout à fait distingué du caractère non-décimal⁹. Est-ce un effet de son identification aux difficultés des élèves ? Elle dit en effet que leur premier contact avec les irrationnels se situerait en CM1-CM2 avec la division lorsqu'ils

⁹ Nous rappelons qu'un nombre décimal est un cas particulier de nombre rationnel et qu'il existe des nombres rationnels non décimaux comme $1/3$ (qui s'écrivent avec une infinité de décimales). Les caractères opposés, c'est-à-dire les caractères « irrationalité » et « non décimal », font donc appel à des notions différentes et sont donc à différencier.

rencontrent « *un nombre qui ne s'arrête pas* » (alors qu'il s'agit de rationnels non décimaux). Le mot d'irrationnel, ils ne le rencontrent jamais.

Dès ses premières phrases, le mot *nombre* revient très souvent. Mais, à ses yeux, les élèves, eux, ne se posent pas de questions sur le nombre, ils ne le voient pas « *existant comme un être mathématique à part* ». Ils n'évoluent pas dans leur conception des nombres, « *ils n'imaginent pas ce que c'est que ce nombre* ». Elle a l'impression que cette difficulté est renforcée par l'usage du formalisme qui fait que les élèves ne savent pas qu'une lettre représente un nombre. L'identité des nombres décimaux n'est pas non plus perçue par les élèves, donc pour elle, la structure des nombres qui intègre les nombres décimaux, ils ne peuvent y accéder. L'écriture formelle leur empêcherait de voir que ce sont des nombres. On ressent que c'est l'idée de structure des nombres et la question de l'existence de ces êtres mathématiques qui lui tiennent à cœur, par contraste avec ce qu'elle nous dit que les élèves ne peuvent percevoir : « *ils ne se posent pas de question sur les nombres ; c'est un truc que tu manipules ; ils n'imaginent pas que derrière c'est une structure aussi forte* ». Cette structure, c'est visiblement la sienne, sans doute issue de sa formation.

On sent une certaine angoisse de ne pouvoir faire partager aux élèves le sens profond du nombre qui serait le sien à travers l'enseignement de la racine carrée : « *du côté des élèves, dans les classes lorsque Pythagore se fait, cela ne les angoisse pas trop d'appuyer sur la touche racine carrée et de trouver un nombre et de l'arrondir au dixième, au centième selon ce qui est demandé* ».

Elle insiste : « *ils n'imaginent pas que c'est un nombre, à propos de la racine carrée, ils ne se posent pas de question sur le nombre, ils n'ont pas construit le nombre décimal même, ils les perçoivent mal parce qu'ils les arrondissent, ils n'ont pas une idée qu'il y a une structure à donner aux nombres, ils n'imaginent pas que là-dessus il y a des choses à construire* ».

Au fil de l'entretien, elle profite de la situation pour élaborer autour de cette question qu'elle ne s'était pas posée, elle se réapproprie la difficulté qu'elle avait

projetée sur les élèves dans un premier temps et se remet en question dans son enseignement : *« le nombre je ne suis pas sûre qu'il soit appris, je ne suis pas sûre que la conception des nombres soit acquise, moi, le problème c'est que je fais des petits machins c'est trop parcellisé, je ne suis pas sûre que je sais construire le nombre, je n'y arrive pas ».*

On perçoit que ce professeur est habité par la notion de nombre, comme s'il s'agissait d'un objet interne extrêmement structurant pour son soi d'enseignante de mathématiques. On peut faire l'hypothèse que c'est un des éléments déterminants de son rapport à ce savoir. Or, comme nous l'avons déjà souligné, les programmes en vigueur au moment de l'entretien (1985-95) sont tels qu'en classe de troisième il n'est pas officiellement légitime de construire les nombres irrationnels ; elle ressent cet empêchement créé par l'institution comme une inquiétude : *« l'inquiétude que je crois avoir bien que je connaisse mal le programme du lycée est-ce que à un moment donné cette réflexion sur les nombres elle se fait »*, ou encore : *« il faudrait redonner du sens à ce nombre et je ne crois pas que les programmes lui donnent »*. Elle s'imagine que les autres professeurs sont moins préoccupés qu'elle par cette question. Elle n'est pas sûre que tous les professeurs donnent du sens aux nombres comme elle le souhaiterait. Cette remarque accentue pour nous la force de la question pour elle. C'est vraiment un *« souci »* pour elle. On perçoit bien dans le discours que Patricia est mise en conflit entre sa conception profonde autour de l'aspect nombre de la racine carrée et ce que les programmes ne demandent pas explicitement d'enseigner aux élèves. C'est comme si ses objets internes étaient attaqués par les injonctions officielles de l'institution, elle propose presque de changer les programmes : *« presque moi j'enlèverais les opérations sur les racines carrées »*. On voit ici, dans l'excès de ses propos, la force de son investissement sur l'objet nombre : *« on fait des opérations sur la racine carrée en troisième et là il n'y a aucun problème qui donne du sens [...] il faudrait enlever du programme de*

troisième le côté opérationnel ».

Cet entretien est exemplaire de la manière dont un enseignant peut se saisir de la situation d'entretien pour élaborer autour d'une question à laquelle il n'avait pas réfléchi consciemment et systématiquement auparavant. On perçoit le déroulement de l'élaboration qui se fait sur le vif au fil de l'entretien. Patricia prend conscience des empêchements que lui procure le programme et en même temps elle imagine des activités possibles qui pourraient atténuer le problème qui la tracasse : *« je suis en train de penser qu'il y a une chose que je n'ai pas faite avec les nombres irrationnels que je ne fais peut-être déjà pas assez avec les rationnels c'est de les placer sur des droites des axes. [...] Je suis en train de me rendre compte que placer des irrationnels sur un axe gradué c'est quelque chose que je ne fais pas assez souvent [...] c'est vrai que je n'ai pas souvent utilisé le fait de les placer sur la droite cela ferait un truc de plus ».*

Ce travail d'élaboration lui permet de prendre conscience de son désir de moins parcelliser son enseignement pour lui donner une meilleure assise et des bases plus solides pour une construction plus cohérente : *« moi le problème c'est que j'ai fait des petits machins, c'est trop parcellisé je ne sais pas comment trouver quelque chose qui réunit comment réunir toutes ces parcelles moi c'est mon problème j'ai peur de saupoudrer ».*

Elle prend notamment conscience des limites qu'impose le programme et de leur influence sur son enseignement. À propos de racine de 7 par exemple, elle aimerait faire comprendre que c'est un nombre, or elle exprime : *« je crois que l'aspect nombre n'est jamais demandé dans les programmes ».* Elle insiste : *« moi je voudrais mais je ne suis pas sûre que les programmes le prennent en compte ».* Pour ce faire, elle pense à un type d'activités comme « encadrer une racine carrée par deux entiers ou des nombres décimaux » et cela fait surgir un sentiment de perte par rapport à d'anciens programmes qui permettaient selon elle ce genre d'activités ; *« à une époque dans l'ancien programme c'était demandé il y avait tout le travail d'encadrement qui était demandé avec les*

tables de carrés cela a été enlevé je crois que cela ne se fait plus ».

Cette enseignante est profondément préoccupée par l'aspect de nombre de la racine carrée qu'elle arrive difficilement à construire chez les élèves. Elle témoigne tout au long de l'entretien que les programmes actuels la mettent en difficulté par rapport à cette préoccupation. Il nous semble que ce questionnement est bien résumé dans l'énoncé qu'elle nous livre pratiquement en début d'entretien : « *Je voudrais que ce soit un nombre (à propos de racine de 17) j'aimerais qu'ils sachent que c'est un nombre* ». C'est très important pour elle mais aussi en tant qu'élément à partager avec les élèves. Elle conclut d'ailleurs là-dessus dans les derniers moments de l'entretien : « *l'enseignement de la racine carrée au bout du compte souvent c'est un échec avec mes élèves (...) ceci étant il me semble que ce qui est indispensable est de construire le sens de la racine carrée* ».

Claude ou la transmission des traumatismes

Avec le quatrième entretien, celui de Claude, professeur âgé de quarante-deux ans et enseignant en collège dans une ville moyenne de banlieue, nous allons entrer dans un nouveau développement de la problématique. En effet, si chez tous les interviewés de cette enquête, on retrouve la question de la perte des objets fondateurs de leur rapport au savoir mathématique, avec Claude, on va découvrir que le problème s'origine bien en amont de la réforme actuelle proposée par l'institution et que les blessures sont peut-être la trace de traumatismes très anciens que l'institution laisse traverser sans permettre aux enseignants de mener une élaboration suffisante.

Pour commencer, nous notons que dans cet entretien, l'intervieweur est obligé de

multiplier les relances car Claude s'exprime de manière succincte et limitée. Il ne saisit pas, comme précédemment Paule pouvait le faire ou Patricia, l'opportunité de l'échange pour conduire une réflexion pour lui-même.

Le discours de Claude nous fait ressentir que ce professeur n'investit pas fortement son travail pédagogique. Dans l'entretien, on sent qu'il s'implique assez peu émotionnellement. Ses affects sont difficilement perceptibles, sa manière de parler semble en miroir de ce qu'il nous donne à entendre de son comportement dans la classe, un comportement un peu mécanique.

Il perçoit les élèves comme des réservoirs qui fuient, à remplir répétitivement, tout en ressentant que ce n'est pas une véritable solution : « *il faut penser qu'on a quand même plus de la moitié des élèves qui ne marchent qu'avec des réflexes conditionnés* ». Sur le plan pédagogique, il semble un peu blasé. À la question « que faites-vous alors pour ces élèves ? », il répond : « *C'est la répétition, je n'ai jamais trouvé de solution. Aucun professeur ne m'a donné de recette [...] on leur explique on arrive à leur faire admettre mais quand on le reprend quinze jours après il y en a la moitié qui se trompe [...] ils le retiennent parce qu'on les matraque toute l'année pour qu'ils le fassent* ». On relève un vocabulaire guerrier extrêmement abondant, souvent à l'encontre des élèves, « *on les matraque toute l'année (les élèves) [...] il faut se battre pour qu'ils conservent l'écriture exacte avec le radical, il faut les forcer* ». Il souhaite bloquer l'escalade des erreurs, éviter « *les erreurs que cela répercute après* ».

Ce vocabulaire agressif est aussi utilisé à l'encontre du savoir mathématique : Claude fait la « *guerre aux valeurs approchées* » et c'est « *terrible* », « *on se bat toute l'année avec ça* », « *là il y a plein de pièges* ».

Pour lui, le savoir mathématique est du côté « *des valeurs exactes* », de « *l'écriture exacte* », les résultats doivent être mis « *sous forme exacte [...] c'est une idée maîtresse en troisième, il faut les forcer à travailler avec des valeurs exactes* ». De nouveau, c'est la guerre : « *il faut se battre pour qu'ils conservent*

l'écriture exacte avec le radical ». On repère au moins six fois le mot « exact » sur une dizaine de lignes dans le début de l'entretien et le terme revient tout au long du discours. À une question portant sur l'exercice technique de suppression des radicaux au dénominateur d'une expression, il répond « *ce n'est pas un objectif essentiel. Un autre objectif, c'est la notion de valeur exacte* ». À un autre moment, il brandit l'enseigne institutionnelle : « *Dans tous les problèmes de brevet on demande toujours les résultats sous forme exacte* ». Pour lui, la notion de valeur exacte se confond avec la notion de résultat exact et du coup, cela conduit à une chasse aux erreurs : « *on va garder soit des fractions soit des radicaux pour avoir des résultats exacts dans lesquels ne s'introduit encore aucune erreur* ».

Si l'on rapproche cette obsession de la valeur exacte du fait qu'il s'agit pour Claude d'une chasse aux valeurs approchées et de l'importance du vocabulaire guerrier utilisé, il nous semble que la guerre dont il est question est une sorte de croisade pour débarrasser le savoir mathématique de ses impuretés. Le savoir doit être aseptisé, il faut avoir des points de repère bien clairs. Ainsi, il insiste sur « *les carrés parfaits* » pour donner des repères aux élèves.

On dirait que les mathématiques représentent pour lui un univers de pureté et qu'il doit aller à la chasse des impuretés introduites par les élèves. Mais, malheureusement cet univers est quelque peu perturbé par ces nombres irrationnels dont il dit : « *on est obligé de leur faire admettre que ces racines-là ne sont pas des nombres normaux, des nombres qui ne tombent jamais juste* ». D'ailleurs, il dénomme ces nombres des « *nombres particuliers* » au début de l'entretien, et « *nombres bizarres* » à la fin de l'entretien. Ce savoir mathématique qu'il souhaiterait pur est déjà contaminé avant que les élèves ne s'en mêlent. Il voudrait être le porte parole d'une science exacte, mais les nombres « bizarres » l'en empêchent.

Nous n'avons pas pu nous empêcher de ressentir à notre tour que tout se passait comme si Claude revivait le traumatisme du savoir savant, en mineur bien sûr, ce moment où le ciel radieux des pythagoriciens s'est effondré lors de la découverte des irrationnels. L'historien Szabo parle en effet de « *scandale* » et de « *trahison criminelle envers la doctrine pythagoricienne* » à propos de la divulgation de l'irrationalité mathématique. Selon plusieurs sources, on rapporte même que l'auteur de cette trahison « *aurait été précipité [...] dans la mer pour cause d'impiété* » (Szabo, 1977). Dans cette même perspective, il semble aussi que le mot grec traduit actuellement par « irrationnel », corresponde plutôt, au niveau étymologique, à quelque chose qui signifierait « inénonçable ». Les termes employés par Claude lui-même, « *nombres non normaux* », « *nombres qui ne tombent jamais juste* », « *nombres particuliers* », « *nombres bizarres* », nous rappellent aussi les expressions utilisées par Stevin dans son ouvrage de 1637¹⁰ pour critiquer certains auteurs : « *C'est chose vulgaire, entre les auteurs d'arithmétique, de traiter de nombres comme $\sqrt{8}$ et semblables, et qu'ils appellent absurdes, irrationnels, irréguliers, sourds, etc.* ». On aperçoit à travers ces éléments, que cette découverte a bien agi comme un traumatisme pour les mathématiciens grecs et que ses effets ont traversé l'histoire puisque des traces sont encore perceptibles aujourd'hui.

Quand Claude dit : « *La valeur exacte a quelque chose pour les élèves d'irréel, cela n'existe pas dans la réalité, il y a quelque chose d'assez profond là-dedans auquel on ne s'attarde pas* », on peut se demander si cet énoncé ne reflète pas ses propres doutes sur la réalité mathématique des nombres irrationnels. Plus généralement, cet énoncé nous donne même peut-être quelques indications sur sa conception des objets mathématiques. Il semble qu'elle repose sur une conception matérielle et qu'elle n'ait pas réellement évolué vers une conception des objets mathématiques comme construction de l'esprit. « *Ils ont du mal à considérer $\sqrt{17}$ comme un nombre qui représente une longueur* ». De même, lorsqu'il fait

¹⁰ Dans son ouvrage de 1634 : *Traité des incommensurables grandeurs*.

référence à l'apprentissage des nombres bizarres par les élèves, il considère « *qu'ils les manipulent sans trop savoir ce qu'il y a derrière* ». En quoi ce trouble sur le savoir projeté sur les élèves ne reflète-t-il pas le sien, actuel ou passé, et revivifié au contact des élèves ?

On peut se demander dans quelle mesure il ne transmet pas là son propre rapport traumatique au savoir aux élèves, — cf. le fait qu'il souligne que personne ne lui a donné de recettes et que les élèves aimeraient des recettes et qu'il ne peut leur en donner — que lui-même n'a pas vraiment transcendé. L'institution ne lui en a pas donné les moyens et même, on pourrait dire que le silence institutionnel le pousse à une forme de régression. On assiste bien là aux effets d'après-coup des traumatismes du savoir savant dans le rapport au savoir du professeur et dans la transmission qu'il effectue. En quoi ces effets sont dus ou plutôt renforcés par la non prise en charge par l'institution des crises dans le savoir savant ?

On peut aussi se demander si les enseignants qui ont à accompagner répétitivement les élèves pour surmonter le traumatisme ne sont pas amenés à devoir le revivre et à ré-habiter ses traces par le contact avec les élèves. Cela joue dans les deux sens, ils transmettent les propres impensés et doutes de leur rapport au savoir, et réciproquement, le vécu des élèves réactualise chaque année leur confrontation avec ces traumatismes (Blanchard-Laville, 1998).

Des traumatismes en chaîne dans la généalogie des savoirs

En résumé, soulignons que, dans un premier temps, nous avons été particulièrement sensibles dans les discours de ces enseignants à l'expression de sentiments nostalgiques vis-à-vis de leur formation et même de regrets concernant le savoir mathématique qu'ils ont rencontré au cours de leurs études et qui a fondé leur identité de professeur de mathématiques.

Rappelons que les entretiens effectués auprès de ces enseignants portaient sur la question de l'introduction de la racine carrée au collège et au lycée, introduction

qui se situe dans une perspective d'accès aux nombres réels. Or, pour des enseignants de mathématiques, les *nombres réels* constituent sans aucun doute un objet central du savoir mathématique qu'ils ont choisi d'enseigner. Cet objet peut même être considéré comme un des objets les plus significatifs sur lequel reposent de nombreuses constructions théoriques en mathématiques. C'est presque un axe qui structure l'avancée du savoir mathématique, une sorte de colonne vertébrale qui soutient l'édifice de l'algèbre et de l'analyse. À ce titre, la confrontation avec ces objets pour des étudiants futurs professeurs de mathématiques constituent une sorte de noyau initiatique dans leur formation.

Au niveau de l'histoire des mathématiques, l'évolution du concept de nombre a provoqué plusieurs crises graves, depuis la découverte des grandeurs irrationnelles chez les Grecs jusqu'à l'élaboration des constructions formelles de l'ensemble des nombres réels de la fin du XIX^{ème} siècle. C'est justement parce que les fondements de l'analyse, domaine important des mathématiques dans lequel sont essentiellement étudiées les fonctions et, en particulier les fonctions numériques, n'étaient pas suffisamment « solides » ou trop dépendantes d'une géométrie intuitive, que les mathématiciens de la fin du XIX^{ème} siècle ont cherché à élaborer des constructions plus rigoureuses de l'ensemble des nombres réels. Dans la foulée, les mathématiciens ont cherché à maîtriser la notion d'infini et cette tentative a entraîné une nouvelle crise du savoir qui a débouché sur la découverte de ce qu'on a appelé les nombres transfinis ; ces nombres sont en quelque sorte des mesures des différents ensembles infinis, qui permettent de comparer ces ensembles du point de vue de l'ordre et sur lesquels on a construit une arithmétique.

À nos yeux, toutes ces crises dans le savoir mathématique peuvent être interprétées comme des *traumatismes*, au sens où les fondations de l'édifice du savoir sont ébranlées par des forces que le système ne peut contenir en l'état. En effet, les contradictions et les paradoxes se multiplient et provoquent des stimuli que le savoir actuel ne peut absorber. Seules de nouvelles découvertes permettent

alors de transcender la crise mais, à notre sens, l'effet traumatique restera inscrit dans le savoir lui-même. Des traces de ces traumatismes subsistent, par exemple, dans les dénominations des objets eux-mêmes (« irrationnel » depuis les Grecs, « réel » depuis le 17^{ème} siècle bien qu'à l'origine, Descartes a proposé ce terme plutôt en opposition à « imaginaire »¹¹), qui attestent des restes de ce rapport traumatique des mathématiciens à ces objets. La plupart du temps, les traces ont été comme effacées. Mais, de façon récurrente, les crises resurgissent, bousculant de nouveau les capacités de maîtrise acquises jusque-là. À chaque fois, l'équilibre retrouvé ne met pas à l'abri de voir émerger d'autres paradoxes engendrés par la nouvelle complexité mise à jour.

Chaque étudiant en mathématiques, enseignant de mathématiques potentiel, va être confronté à son insu au cours de sa formation aux traces latentes de cette histoire. Le savoir lui est en général présenté sous une forme aboutie et lissée, forme qui a gommé et absorbé les crises historiques qui ont eu lieu et qui, d'une certaine façon, dénie le temps qui a été nécessaire pour les surmonter. Pour autant, on peut faire l'hypothèse que les étudiants qui reçoivent ce savoir relativement aseptisé mais non sans cicatrices ne sont pas sans ressentir souterrainement les effets traumatiques de cette histoire.

Les traumatismes du savoir savant se répercutent au niveau du savoir à enseigner à travers l'inévitable transposition didactique (Chevallard, 1985) que l'institution d'enseignement opère. D'ailleurs l'institution témoigne de sa difficulté à gérer ces crises induites par celles du savoir savant par la succession des stratégies d'enseignement qu'elle suggère au travers de tous les changements de programmes et par les « vides » qu'elle crée dans les curricula dans certains cas. C'est particulièrement visible et significatif dans le cas que nous étudions ici, à savoir celui de l'introduction des nombres réels. Nous savons que la réforme dite des mathématiques modernes a été impulsée dans les années soixante par une

¹¹ La géométrie (1637), Editions de l'AREFPPI, 1984.

équipe de mathématiciens qui avait le projet de réduire l'écart entre les savoirs mathématiques enseignés et les savoirs de recherche ; équipe dont certains membres ont participé à l'aventure Bourbaki de reconstruction de tout l'édifice mathématique de l'époque. Notons que les caractéristiques essentielles de cette restructuration sont en quelque sorte liées à une tentative de combler les vides repérés au niveau du savoir tout en assurant une cohérence parfaite de l'ensemble dans le cadre d'une rigueur axiomatique qui serait irréprochable¹². On peut se demander s'il ne s'agissait pas pour eux d'une tentative de maîtriser les différents traumatismes passés et à venir. Le projet de réforme de l'enseignement mathématique au collège et au lycée a été mis en œuvre par l'institution qui se l'est approprié mais n'a pu être tenu que quelques années et on a assisté par la suite à ce qu'on appelle la fermeture de la réforme en 1978, laquelle a créé un vide dans le savoir à enseigner, vide manifeste au niveau des instructions officielles et des programmes¹³. Ce nouveau rapport institutionnel à l'objet nombre réel est une réponse à la crise institutionnelle provoquée par la réforme. Comme si l'institution avait à son tour des difficultés à négocier le traumatisme du savoir savant à propos des irrationnels (Bronner,1997). Peut-on parler pertinemment de traumatisme institutionnel ? Pendant un temps assez long (la période classique 1850-1950) le système était stabilisé et à un moment donné, par une avancée des mathématiques et la pensée des mathématiciens qui ont voulu apporter ces nouveaux savoirs, le système a été en quelque sorte effracté, les bases anciennes se sont comme effondrées et il ne pouvait aménager la surcharge que cela procurait. Cette surcharge d'excitation n'a pu être absorbée ; en ce sens on peut, nous semble-t-il, véritablement parler de traumatisme institutionnel.

¹² Cette restructuration remonte à Dedekind (1872) qui montre que l'ensemble des nombres réels obtenu par sa construction est « inextensible » et à Cantor (1872) qui insiste, lui, sur le caractère « complet ». Elle sera poursuivie par Hilbert (1899).

¹³ On pourrait presque parler à ce niveau-là de défenses maniaques de la part des mathématiciens par rapport aux traumatismes et de retour du réel lorsque l'institution avec les élèves s'en mêle.

Pour les étudiants en mathématiques, futurs mathématiciens ou futurs enseignants de mathématiques, on peut se demander si l'enseignement qu'ils reçoivent ne ressemble pas à une entreprise inconsciente de déni de l'histoire et de ses crises et aussi, sans doute, de déni des sujets vivants, créateurs de cette histoire. Tous les objets qui ont été problématiques au cours de l'histoire n'apparaissent plus comme tels, ils sont banalisés et figurent maintenant au sein des mathématiques comme des objets ordinaires parmi les autres; ils sont mis au service d'une construction logique, intemporelle et dépersonnalisée. On fait silence — ou presque — sur les traumatismes, un peu comme pour les enfants qui ont subi des violences sur lesquelles on fait silence espérant que « ça va s'arranger tout seul ».

Lorsque ces étudiants deviennent professeurs de mathématiques, il est vraisemblable que des effets de tous ces phénomènes vont advenir. En tant que sujets de l'institution d'enseignement, ils vont avoir à s'adapter aux choix que celle-ci leur propose face aux obstacles auxquels le savoir mathématique a dû déjà faire face. À leur tour, ils vont devoir à leur niveau personnel trouver des aménagements entre ces injonctions institutionnelles et leur propre rapport au savoir mathématique et ainsi aboutir à des compromis professionnellement tenables. À leur suite, les élèves vont, de manière atténuée mais en fonction de la manière dont les enseignants auront aménagé ces difficultés, être touchés par les derniers vestiges de ces effets traumatiques. Enfin, les enseignants auront en retour à revivre partiellement ou différemment ces traumatismes par élèves interposés.

Nous avons pu esquisser dans l'analyse des quatre entretiens comment résonnent ces dénis en cascade au niveau du noyau profond identitaire des enseignants, ce qui nous a amenés à penser que dans certains cas les enseignants subissent une sorte de maltraitance institutionnelle.

Et cela nous semble d'autant plus fort dans la période actuelle que les choix transpositifs qui sont en vigueur accumulent les effets de vide; de ce fait, les

enseignants ne peuvent plus du tout témoigner dans leur enseignement de ce qui risque d'avoir fondé leur soi professionnel de professeurs de mathématiques.

Cette recherche a porté spécifiquement sur l'enseignement du savoir mathématique et même sur certains points particuliers de cet enseignement au cours de la période actuelle. Il nous semble que si nos hypothèses ont quelque pertinence, elles doivent donner des pistes d'intelligibilité plus larges qui pourraient concerner d'autres points particuliers du savoir mathématique en fonction des choix de l'institution d'enseignement et sans doute aussi d'autres types de savoir enseigné que les mathématiques.

Éléments bibliographiques

BEILLEROT J., BLANCHARD-LAVILLE C., MOSCONI N. (sous la direction de) (1996), *Pour une clinique du rapport au savoir*. Paris. L'Harmattan.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1998), L'enseignant et la transmission dans l'espace psychique de la classe, *Revue Recherches en Didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1999), Espace de co-pensée et co-disciplinarié en sciences de l'éducation in Rapport de la recherche commanditée par le CNCRE (Comité National de Coordination de la Recherche en Éducation) *Approches co-disciplinaires des pratiques enseignantes dans leurs rapports aux apprentissages des élèves*.

BRONNER A. (1997a), *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

BRONNER A., (1997b), Les rapports d'enseignants de Troisième et de Seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Revue Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume n° 17.3, La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique*, La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1988-89), *Le concept de rapport au savoir*, Séminaire de

didactique des Mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

KAËS R. (sous la direction de) (1993), *Transmission de la vie psychique entre générations*, Inconscient et culture, Paris, Dunod.

SZABO A. (1977), *Les débuts des mathématiques grecques*, Paris, VRIN.

TISSERON S. (sous la direction de) (1995), *Le psychisme à l'épreuve des générations. Clinique du fantôme*, Inconscient et culture, Paris, Dunod.

Annexe 1

Note sur les ensembles de nombres :

Dans l'enseignement secondaire, les élèves manipulent des nombres dont ils ne savent pas que la définition au niveau mathématique et la structuration en termes d'ensembles relève d'une extrême complexité.

Les nombres entiers naturels suffisent à dénombrer les éléments d'un ensemble fini d'objets et constituent un premier ensemble désigné habituellement par \mathbb{N} . Pour les besoins du mesurage de certaines grandeurs continues comme les longueurs et pour le calcul des proportions, il a été nécessaire d'introduire les nombres rationnels, qui constituent à leur tour l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} , qui contient lui-même l'ensemble \mathbb{N} . Ces nombres rationnels peuvent être caractérisés comme des quotients d'entiers et représentés par les fractions a/b .

En raison de notre système de numération à base dix, des rationnels particuliers appelés nombres décimaux jouent un rôle important dans les pratiques sociales et forment un ensemble appelé \mathbb{D} . Ce sont en fait des quotients d'un entier par une puissance de dix ($a/10^n$), qui sont en général manipulés par leurs écritures décimales et plus connus des élèves comme « des nombres à virgule ». Ils apparaissent dans notre vie quotidienne pour exprimer mesures et prix.

Ce panorama n'est cependant pas complet pour une pratique mathématique, comme l'ont montré depuis très longtemps les célèbres mathématiciens grecs de l'époque d'Euclide. La mesure de certaines grandeurs comme la diagonale d'un carré a conduit à introduire des nombres autres que les nombres rationnels : les nombres dits irrationnels. La réunion de l'ensemble des nombres rationnels et de l'ensemble des nombres irrationnels constitue alors le plus grand ensemble de nombres servant à mesurer, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . Cet ensemble peut se figurer par ce qu'on appelle la droite numérique et, si on se représente les nombres réels comme étant les points sur cette droite, chaque nombre réel a sa place sur la droite et chaque point de cette continuité a un

représentant dans l'ensemble des nombres réels, on peut saisir ainsi que cet ensemble ne laisse pas de « trous », on dit qu'il est « complet ». Cela donne, au final, un système emboîté de quatre ensembles de nombres \mathbb{N} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} pour lesquels les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) peuvent être étendues. Nous nous en tiendrons là, tout en sachant que l'on peut poursuivre la construction numérique : ensemble des nombres complexes, en particulier.

Annexe 2

Typologie :

Position de conformité stricte

Cette position se caractérise tout d'abord par l'importance accordée à la maîtrise des savoir-faire basés sur les règles algébriques (comme celles qui sont liées à la racine carrée d'un produit). Sans doute, la présence des règles algébriques concernant l'objet « racine carrée » dans les programmes officiels¹⁴ (depuis l'arrêté du 14 novembre 1985) et leur mise en relief dans la « colonne » des compétences exigibles constituent une contrainte forte pour les enseignants.

L'enseignement de la racine carrée des professeurs relevant de ce positionnement n'est pas lié à une ouverture vers les irrationnels, ou une perspective d'approche des nombres réels. Pour se justifier, ces enseignants évoquent en général les contraintes institutionnelles plutôt que l'objet de savoir culturel : « *c'est le programme* » disent certains, tandis que d'autres expriment très fort le projet de faire réussir les élèves au Brevet.

Position d'ouverture vers les nouveaux nombres

Ces professeurs souhaitent faire comprendre aux élèves que certaines fractions et racines carrées ont un statut de nombre ; cependant ils ne parlent pas d'irrationalité à propos des racines carrées, ils ne montrent pas que ces racines carrées ne sont pas des nombres décimaux. Malgré cela, les aspects de véritable « nouveau nombre » à caractère irrationnel ou non décimal, ne sont pas explicités dans le discours. Cette position d'ouverture vers les nouveaux nombres peut être interprétée comme une tentative de réduction du vide didactique institutionnel sur les réels, qui maintient, quand même, une grande conformité avec le rapport institutionnel.

Position d'ouverture vers les nombres non décimaux

Certains enseignants s'imposent d'introduire un travail sur la nature non décimale de certaines racines carrées comme $\sqrt{2}$ $\sqrt{7}$. Ils s'inscrivent dans le prolongement de la position précédente d'ouverture vers des « nouveaux nombres », et essaient de problématiser cet aspect en utilisant l'opposition « décimal-idécimal » qui est alors assumée. Ils peuvent se limiter à traduire le phénomène par l'expression : « des nombres qui ne tombent pas juste ». Mais ils peuvent aussi proposer des exercices pour montrer que ces nombres ne sont pas des décimaux, sans toutefois démontrer que ce sont des nombres irrationnels. Ce type de rapport institutionnel induit encore une position où se négocie une réduction du vide didactique sur les nombres réels, en jouant sur l'opposition décimal-non décimal.

Position d'ouverture vers les nombres irrationnels

Parmi les enseignants ayant répondu aux questionnaires ou interviews, quelques-uns envisagent de présenter explicitement une notion de nombre irrationnel à travers l'enseignement de la racine carrée. Certains introduisent même des connaissances permettant un traitement de l'irrationalité. Pour comprendre les raisons de cette position, on peut avancer le poids culturel de l'irrationalité des racines carrées. Mais il peut aussi y avoir une nécessité didactique de montrer la nature de « nouveau nombre », nécessité qui peut être encore interprétée comme une forme de réponse au vide didactique, en se situant davantage dans la perspective culturelle de l'opposition rationnel-irrationnel.

¹⁴ Il est fait référence ici aux programmes et instructions officielles en vigueur au moment des interviews et questionnaires.